FORMELSAMMLUNG

Jörg Bucher

V0.3 BETA

Geändert am 24.08.2006

Inhaltsverzeichnis

1 MATHEMATIK

1.1 Vektorgeometrie

1.1.1 Begriffe

1.1.1.1 Vektorbegriff

Definition	Ein Vektor ist durch einen Betrag und eine Richtung definiert.

1.1.1.2 Lage der Vektoren

Kollinear

Zwei Vektoren sind kollinear, wenn sie zu einer Gerade parallel sind

Komplanar

Drei Vektoren sind komplanar, wenn sie zu einer Ebene parallel sind

1.1.1.3 Schreibweise

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ (vgl. auch 1.14 Matrizen, Seite 41)

1.1.1.4 Einheitsvektor

Hat die Länge und den Betrag 1 (d.h. dehnt sich mit der Länge 1 nur in eine Richtung aus)

Berechnung des Einheitsvektors eines beliebigen Vektors: $\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

1.1.1.5 Ortsvektor r

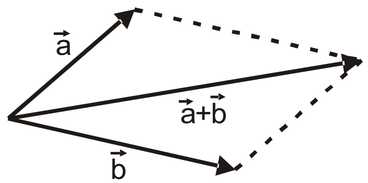
Ortsvektoren geben den Ort eines Punktes bezüglich einem vorgegebenen Anfangspunkt (idR. Ursprung) an.

1.1.2 Betrag eines Vektors

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$$

1.1.3 Addition und Subtraktion

Addition

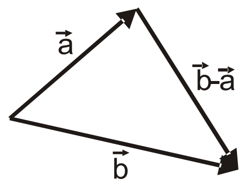


$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

Assoziativ- und Kommutativgesetze gelten

Subtraktion



$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

1.1.4 Multiplikation mit einem Skalar

$$k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \\ \vdots \\ k \cdot a_n \end{pmatrix}$$

Hinweis:
kollineare Vektoren können durch Multiplikation ineinander überführt werden

1.1.5 Vektorielle Geradengleichung

$$\vec{x} = \vec{a} + k \cdot \vec{u}$$

a: Stützvektor (Ortsvektor)
b: Richtungsvektor (freier Vektor)
x: Ortsvektor jedes Punktes der Gerade (je nach Wert von k)

1.1.6 Skalarprodukt zweier Vektoren

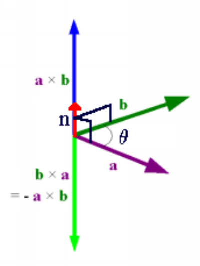
Die Komponenten der beiden Vektoren werden jeweils multipliziert und die Produkte addiert.

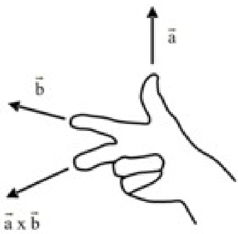
$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

α: Zwischenwinkel der Vektoren a und b

TI-89: dotP({a1,a2, ...},{b1,b2, ...})

1.1.7 Vektorprodukt zweier Vektoren





$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\alpha\right)$$

α: Zwischenwinkel Vektoren a und b

1.1.8 Vektorielle Ebenengleichung

$$\vec{x} = \vec{a} + m\cdot\vec{u} + n\cdot\vec{v}$$

a: Stützvektor (Ortsvektor)
u, v: Richtungsvektoren (freie Vektoren), nicht kollinear
x: Ortsvektor jedes Punktes der Ebene (je nach Wert von m und n)

1.1.9 Ableitung eines Vektors

Jede Richtungskomponente wird einzeln abgeleitet

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

1.1.10 Anwendungen

1.1.10.1 Mittelpunkt einer Strecke

Die Vektoren a, b seien Ortsvektoren der Anfangs- und Endpunkte der Strecke, dann gilt für den Ortsvektor des Streckenmittelpunktes m:

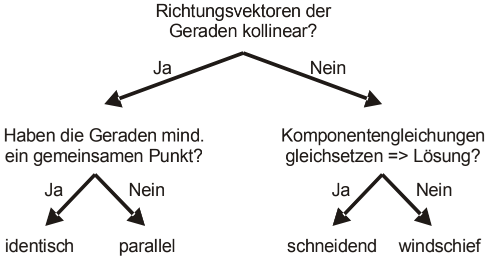
$$\vec{m} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$$

1.1.10.2 Schwerpunkt eines Dreieckes

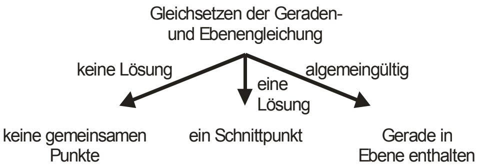
Die Vektoren a, b,c seien Ortsvektoren der Eckpunkte des Dreiecks, dann gilt für den Ortsvektor des Schwerpunktes s:

$$\vec{s} = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

1.1.10.3 Gegenseitige Lage von Geraden



1.1.10.4 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen



1.1.10.5 Schnittwinkel zweier Ebenen

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

n1 und n2 sind Normalenvektoren (bzw. das Vektorprodukt von zwei in der jeweiligen Ebene enthaltenen Vektoren) der Ebenen

1.2 Trigonometrie

1.2.1 Trigonometrische Beziehungen

Aus $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ folgt:

$$y(t) = C_1 \cdot \sin(\alpha) + C_2 \cdot \cos(\alpha) = A \cdot \sin(\alpha+\varphi)$$

=> v.a. für Dgl. und Schwingungslehre

1.3 Folgen

1.3.1 Grenzwert

konvergieren: Die Folge hat einen Grenzwert
divergieren: Die Folge hat keinen Grenzwert

1.3.2 Arithmetische Folge

Rekursive Definition: $a_{n+1}=a_n+d$ Für das n-te Glied: $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$

1.3.3 Geometrische Folge

Rekursive Definition: $a_{n+1}=a_n\cdot q$ Für das n-te Glied: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$

1.4 Reihen

Definition	Die Summe von Gliedern einer Folge heisst Reihe.

1.4.1 Summenformeln

1.4.1.1 Arithmetische Reihe

$$s_n=n\cdot\frac{a_1+a_n}{2}=n\cdot\left[a_1+\frac{d\cdot(n-1)}{2}\right]$$

1.4.1.2 Geometrische Reihe

$$s_n=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$$

1.4.1.3 unendliche Reihen

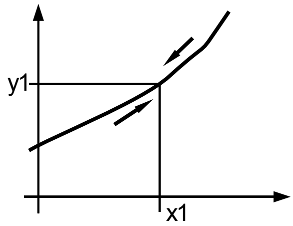
$$s_n=a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+s_n\rightarrow s=\lim_{n\to\infty} s_n$$

für arithmetische Folge: die Summe von unendlich vielen Glieder existiert nicht!

für die geometrische Folge: $s=\frac{a_1}{1-q}$ $\quad |q|<1$

1.5 Funktionen

1.5.1 Grenzwert



Grenzwerte von unten und oben (links&rechts) der Stelle x_1 bilden. Sind die Grenzwerte gleich, so ist y_1 der Grenzwert.

1.5.2 Stetigkeit

Definition	Die Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig, falls f(x_0) definiert **und** $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Die Funktion f ist stetig, wenn f an jeder Stelle im Definitionsbereich stetig ist.

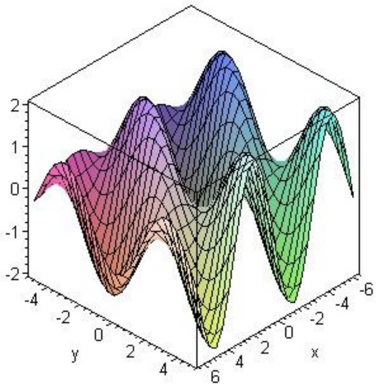
1.5.3 Funktionen von mehreren Variablen (MFP 234)

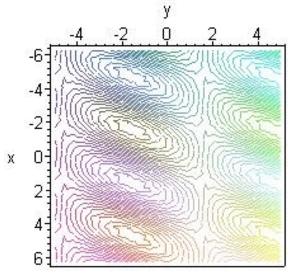
1.5.3.1 Definition

Unter einer Funktion von mehreren Variablen versteht man eine Vorschrift, die jedem geordneten n-Tupel (x_1; x_2; ... ; x_n) aus einer Menge D genau ein Element z aus einer Menge W zuordnet.
Symbolische Schreibweise: $z = f(x_1; x_2; ... ; x_n)$ bzw. $f: D \to W$

1.5.3.2 Grafische Darstellung

Fläche im Raum **Höhenlinien**





Beispiel mit z = sin(x)-cos(x-y)

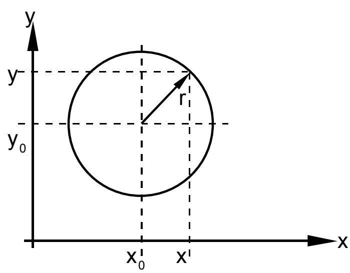
Verbinden Punkte mit dem selben Funktionswert (z = konst.)

1.5.3.3 Partielle Funktion

Lässt man eine oder mehrere Variablen der Funktion konstant. So spricht man von einer partiellen Funktion.

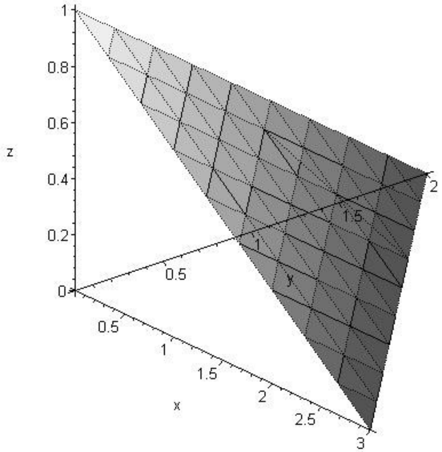
1.5.4 Spezielle Funktionen

1.5.4.1 Allgemeine Kreisgleichung



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

1.5.4.2 Ebene



$$E: \frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$$

1.5.5 Kurvendarstellungen

1.5.5.1 Darstellung ebener Kurven

Graph einer Funktion

Durch eine Fuktion y = f(x) wird jeder x-Koordinate eines Punktes eine y-Koordinate zugeordnet (Bsp: $y = x^2 + 4$)

In impliziter Form

Eine Gleichung F(x,y) = 0 ist gegeben. Die Variablen x und y haben die durch die Gleichung definierte Bedingung zu erfüllen (Bsp: Kreisgleichung)

In Parameterdarstellung

Der Ortsvektor jedes Punktes der Kurve ist parameterabhängig durch Funktionen für die Richtungskomponenten des Ortsvektors gegeben.

$$\vec{r}(t)=\phi(t)\,\vec{e}_x+\psi(t)\,\vec{e}_y=\begin{pmatrix}\phi(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix}$$

Ist der Parameter t die Zeit so ergeben die Ableitungen der Komponenten den Vektor für die Geschwindigkeit im Punkt $\vec{r}(t)$ (Ortsvektor) => $\vec{v}(t)=\begin{pmatrix}\phi'(t)\\ \psi'(t)\end{pmatrix}$

Allgemein ist der Vektor $\vec{v}(t)$ die Tangente an die Kurve im Punkt $\vec{r}(t)$ (Ortsvektor)

1.5.5.2 Darstellung räumlicher Kurven

Räumliche Kurven können nur mit der Parameterdarstellung (siehe oben) sinnvoll beschrieben werden (jedoch als Ortsvektor mit drei Richtungskomponenten).

1.6 Differentialrechnung

1.6.1 Differenzenquotient (Steigung der Sekante)

$$m_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

1.6.2 Differentialquotient (Steigung der Tangente)

$$f'(x_0) = m_t = \lim_{\Delta x \to 0} m_S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

1.6.3 Ableitungsfunktion

1.6.3.1 Definition

Definiert für jedes x die Tangentensteigung

Schreibweisen: $f'(x)$, $y'(x)$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$

Maple:
diff(y(x),x) bzw. diff(y(x),x$n) wobei n => n-te Ableitung
D(y)(0) => Wert der Ableitung von y an der Stelle 0
Maple Help: The D operator computes derivatives of operators, while diff computes derivatives of expressions.

1.6.3.2 Wichtige Ableitungen (MFP 131)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sin(x)] = \cos(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\cos(x)] = -\sin(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[e^x] = e^x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}[\ln(x)] = \frac{a}{x}$$

1.6.4 Ableitungsregeln (MFP 132)

1.6.4.1 Faktorregel

$$[c \cdot f(x)]' = C \cdot f'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$$

1.6.4.2 Summenregel

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

1.6.4.3 Produktregel

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \quad + \quad f(x) \cdot g'(x)$$

1.6.4.4 Quotientenregel

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

1.6.4.5 Kettenregel

$$f'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$$

F'(u): äussere Ableitung
u'(x): innere Ableitung

1.6.5 Newton-Verfahren (MFP 24)

Zum bestimmen der Nullstelle einer Funktion nähert man sich mit diesem Verfahren an die Nullstelle an:

Für einen Iterationsschritt $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

1.6.6 Charakteristische Kurvenpunkte (MFP 138)

1.6.6.1 Monotonie

Bestimmt durch 1. Ableitung:

streng steigend	***streng sinkend***
Steigung der Tangente positiv $f'(x_0) > 0$	Steigung der Tangente negativ $f'(x_0) < 0$

1.6.6.2 Krümmungsverhalten

Bestimmt durch 2. Ableitung:

Linkskrümmung	***Rechtskrümmung***
$f''(x_0) > 0$	$f''(x_0) < 0$

1.6.6.3 Extremalstellen

Maxima und Minima

Maxima	***Minima***
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$	$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$

Allgemeine Kriterien (MFP 141)

Obiges Kriterium kann versagen. Allgemein gilt $f'(x_0) = 0$ und

1.6.6.4 Wende- und Sattelpunkte

Wendepunkt	***Sattelpunkt***
$f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) \neq 0$	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$ $f'''(x_0) \neq 0$

1.6.7 Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich/Definitionslücken finden
   => Wo ist die Funktion definiert (Div/0)
2. Koordinatensymmetrie
   => gerade falls f(-x) = f(x) => z.B. x^2, x^4
   => ungerade falls f(-x) = -f(x) => z.B. x^3, x^5
3. Nullstellen
   => f(x) = 0
4. Polstellen
   => Prüfe Stellen an denen f nicht definiert ist
   => bei a einen Pol wenn: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$
5. Ableiten bis zur 3. Ordnung
6. relative Extremalstellen (Max- / Minstellen) bestimmen
7. Wende- und Sattelpunkte bestimmen
8. Verhalten im Unendlichen prüfen
   => für grosse x schmiegt sich die Funktion g(x) an f(x) an
   => $\lim_{x \to \pm\infty} |f|(x) - g(x) = 0$
9. Wertebereich der Funktion definieren
10. Funktion zeichnen

1.6.8 Partielle Ableitungen (MFP 238)

1.6.8.1 Definition & Schreibweise

Wird die gegebene Funktion (Bsp. z = f(x,y)) nach einer Variablen abgeleitet, so spricht man von einer partiellen Ableitung. Es gelten die bekannten Ableitungsregeln.

Schreibweise: $f_x(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}[f(x;y)]$ (Bsp. nach x abgeleitet)

Geometrische Darstellung und Steigungswinkel: MFP 239

1.6.8.2 Partielle Ableitungen höherer Ordnung (MFP 240)

Partielle Ableitungen höherer Ordnung erhält man, indem man die gegebene Funktion mehrmals nacheinander partiell differenziert.

Schreibweise:

$f_{xx}(x;y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (Bsp. 2x nach x abgeleitet)

$f_{xy}(x;y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ (Bsp. zuerst nach x dann nach y abgel.)

Die Differentiationsschritte sind grundsätzlich in der Reihenfolge der Indizes durchzuführen es sei denn...

Satz von Steiner

Sind die partiellen Ableitungen n-ter Ordnung alle stetig, dann spielt die Reihenfolge des Ableitens keineRolle

1.6.8.3 Tangentialebene

Alle im Flächenpunkt P = (x_0, y_0, z_0) an die Bildfläche z = f(x,y,z) angelegten Tangenten liegen i.d.R. in einer Ebene => Tangentialebene

Gleichung der Tangentialebene:

$$z-z_0=f_x(x_0;y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0;y_0)\cdot(y-y_0)$$

1.6.8.4 Das Totale/Vollständige Differential

Für eine Funktion mit zwei Variablen:

$dz=f_x\,dx+f_y\,dy=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ dx,dy: Änderung in x- bzw. y-Richtung

Allgemein

$$dz = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \ldots + f_{x_n} dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

1.7 Integralrechnung

1.7.1 Unbestimmtes Integral (MFP 146)

$$f(x) \underset{integrieren}{\overset{aufleiten}{\rightarrow}} F(x) + \boldsymbol{C} = \int f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

F(x) ist eine Stammfunktion von f(x)

1.7.2 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

1.7.3 Bestimmtes Integral (MFP 143)

als Flächeninhalt unter der Kurve:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_K)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

1.7.4 Wichtige Integrale (MFP 148)

$$\int x^n\,\mathrm{d}\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

1.7.5 Fläche zwischen zwei Kurven

1.7.5.1 Die Kurven schneiden sich <u>nicht</u>

$$A = \int_a^b [obere\ Kurve - untere\ Kurve]\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}\,x$$

1.7.5.2 Die Kurven schneiden sich

<u>1. Variante</u>

x-Stellen der Schnittpunkte berechnen und anschliessend:

$$A=\left|\int_{a}^{x_1}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}\,x\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}\,x\right|+\ldots$$

2. Variante

$$A=\int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}\,x$$ => nicht immer optimal!

1.7.6 Uneigentliche Integrale (MFP 163)

Von einem uneigentlichen Integral wird gesprochen, wenn der Integrationsintervall oder der Funktionswert des Intervalls gegen unendlich geht
Beispiele:

$$A=\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x=\lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$A=\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}\,x=[-e^{-x}]_{0}^{\infty}=\lim_{a\to\infty}[-e^{-a}]-e^{-0}=0+1=1$$

1.7.7 Rotationsvolumen (MFP 169)

1.7.7.1 Kurve rotiert um die x-Achse

$$V_X=\pi\cdot\int_{a}^{b} f(x)^2\,\mathrm{d}\,x \qquad y=f(x)\geq 0$$

1.7.7.2 Kurve rotiert um die y-Achse

$$V_Y=\pi\cdot\int_{c}^{d} g(y)^2\,\mathrm{d}\,y$$

1.7.8 Mehrfachintegrale (MFP 246ff)

1.7.8.1 Doppelintegrale

Beschreibung *(Beispielhaft in kartesischen Koordinaten)*

Ein Doppelintegral lässt sich in anschaulicher Weise als ein Volumen vorstellen. Das Volumen wird durch ein Gebiet B (typischerweise auf der x-y-Ebene) und die dem Gebiet B zugeordnete Fläche (beispielsweise beschrieben mit z = f(x,y)) begrenzt.

Berechnung in kartesischen Koordinaten

1. Gebiet B in kartesischen Koordinaten beschreiben

I. y-einfach: $B=\{(x\ ,\ y)|a\leq x\leq b\ ,\ \alpha(x)\leq y\leq\beta(x)\}$
d.h. der Bereich von y ist vom x-Wert abhängig

II. x-einfach: $B=\{(x\ ,\ y)|a\leq y\leq b\ ,\ \alpha(y)\leq x\leq\beta(y)\}$
d.h. der Bereich von x ist vom y-Wert abhängig

2. Doppelintegral für das Volumen aufstellen wobei z = f(x,y)

$$V=\iint_B f(x\ ,\ y)\,\mathrm{d}\,B=\int_{x=a}^{b}\int_{y=\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x\ ,\ y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x$$

Beispiel für y-einfach

3. Doppelintegral gemäss den Integrationsregeln von innen nach aussen auflösen.

Berechnung in Polarkoordinaten

1. Integrand f(x,y) in Polarkoordinaten ausdrücken => z = f(r,φ)

$$x=r\cdot\cos(\varphi)\quad\text{und}\quad y=r\cdot\sin(\varphi)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+k\cdot\pi$$

2. Gebiet B in Polarkoordinaten beschreiben

$$B=\{P(r\ ,\ \varphi)|\alpha\leq\varphi\leq\beta\ ,\ r_1(\varphi)\leq r<r_2(\varphi)\}$$

3. Doppelintegral für das Volumen aufstellen wobei z = f(r,φ)

$$V=\iint_B f(x\ ,\ y)\,\mathrm{d}\,B=\int_{\varphi=\alpha}^{\beta}\int_{r=r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\ ,\ \varphi)\cdot\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\varphi$$

Beachte zusätzl. Faktor r!

4. Doppelintegral gemäss den Integrationsregeln von innen nach aussen auflösen.

1.7.8.2 Dreifachintegrale (MFP 252)

Beschreibung *(Beispielhaft in kartesischen Koordinaten)*

Ein Dreifachintegral lässt sich in anschaulicher Weise als ein Volumen vorstellen in dem eine Grösse (z.B. Masse, Ladung) nach der Funktion y=f(x,y,z) verteilt ist. Man möchte nun beispielsweise die Gesamtmasse / Gesamtladung in dem Volumen berechnen. Die Boden- und Deckfläche ist dabei wiederum als Funktion von ihnen projizierten Fläche auf der x-y-Ebene definiert.

Berechnung in kartesischen Koordinaten

1. Projizierende der Boden- und Deckfläche (Grundriss) bestimmen

$$B^*=\{(x\ ,\ y)|a\leq x\leq b\ ,\ \alpha(x)\leq y\leq\beta(x)\}\quad\text{bzw.}$$

$$B^*=\{(x\ ,\ y)|a\leq y\leq b\ ,\ \alpha(y)\leq x\leq\beta(y)\}$$

2. Räumliches Gebiet B in kartesischen Koordinaten beschreiben:
$$B = \{(x, y, z) | (x, y) \in B^* \; und \; \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$
φ(x,y): Bodenfläche bzw. ψ(x,y): Deckfläche

3. Doppelintegral für das Volumen aufstellen wobei z = f(x,y)
$$Q = \iiint_B f(x, y, z) \, \mathrm{d}B = \int_{x=a}^{b} \int_{y=\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_{z=\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x, y, z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

4. Dreifachintegral gemäss den Integrationsregeln von innen nach aussen auflösen.

Berechnung in Zylinderkoordinaten

Es gilt grundsätzlich die selbe Vorgehensweise wie mit Polarkoordinaten bei Doppelintegralen jedoch muss B von drei Variablen (r, φ ,z) abhängen (Analog wie bei kartesischen Koordinaten). Wiederum ist die zusätzliche Multiplikation mir r zu beachten!

1.8 Vektoranalysis (MFP 328ff)

1.8.1 Skalarfelder

Ein Skalarenfeld ist eine Abbildung (Zuordnungsvorschrift), welche jedem Punkt eines ebenen oder räumlichen Gebietes eine eindeutige **skalare Grösse** zuordnet.

Stationäres Feld	Das skalare Feld ändert sich im Laufe der Zeit nicht
Niveauflächen	Flächen auf denen die Skalare einen konstanten Wert haben. $\Phi(x,y,z)$ = konst.
Niveaulinien	in einem ebenen Skalarenfeld. Linien auf denen die Skalare einen konstanten Wert haben. $\Phi(x,y)$ = konst.

1.8.2 Vektorfelder

Ein Vektorfeld ist eine Abbildung (Zuordnungsvorschrift), welche jedem Punkt eines ebenen oder räumlichen Gebietes einen eindeutigen **Vektor** zuordnet.

ebenes Vektorfeld
$$\vec{F}(P) = \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \end{pmatrix}$$

räumliches Vektorfeld $\vec{F}(P)=\begin{pmatrix} F_x(x,y,z) \\ F_y(x,y,z) \\ F_z(x,y,z) \end{pmatrix}$

Feldlinien: Kurven die in jedem Punkt von einem Feldvektor tangiert werden.
$\vec{F}(P)\times\vec{r}=\vec{0} \quad oder \quad \vec{F}(P)\times d\,\vec{r}=\vec{0}$

Homogenes Feld: Die Feldvektoren haben in jedem Punkt den selben Betrag und die selbe Richtung $\vec{F}(P)=\overrightarrow{const.}$
Bsp: Plattenkondensator

Kugel bzw. Radialsymetrisches Feld
Jeder Feldvektor hat radiale Richtung, der Betrag hängt vom Abstand r zum Ursprung ab. $\vec{F}(P)=f(r)\cdot\vec{e}_r$

Zylinder bzw. Axialsymetrisches Feld
JederFeldvektor hat axiale Richtung, der Betrag hängt vom Abstand ϱ zur Zylinderachse ab $\vec{F}(P)=f(\varrho)\cdot\vec{e}_\varrho$

1.8.3 Gradient (MFP 340)

$$\vec{n}=grad\ \phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\vec{e}_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\vec{e}_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\vec{e}_z=\begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix}$$

Φ(x,y,z): Räumliches Skalarenfeld (beim ebenen Skalarenfeld nur zwei Komponenten)

Der Gradient ordnet jedem Punkt einen Vektor zu. Der Gradient ist ein Vektorfeld.

Nabla-Operator

$$\vec{\nabla}=\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \Rightarrow grad\ \phi=\vec{\nabla}\cdot\phi$$

1.8.4 Richtungsableitung

Die Richtungsableitung ist ein Mass für die Änderung des Funktionswertes von Φ wenn man sich um eine Längeneinheit vom Punkt P (steckt im Gradienten) aus in Richtung von $\vec{a}$ bewegt.

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{a}}=(grad\ \phi)\circ\vec{e}_a$$

Eigenschaften der Richtungsableitung

- Die Richtungsableitung ist in Richtung des Gradienten im Punkt P am grössten.

- Ist $\vec{e}_a$ Tangential zu einer Niveaulinie bzw. Niveaufläche, so steht der Gradient senkrecht auf $\vec{e}_a$

1.8.5 Linien- / Kurvenintegrale (MFP 352)

Das Linienintegral entlang eines Weges von P1 nach P2 in einem Vektorfeld ist definiert durch:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \circ d\,\vec{r} = \int_{t_a}^{t_b} (\vec{F} \circ \dot{\vec{r}})\,dt$$ (vgl. MFP 352)

$\vec{F} = \vec{F}(x\,;\,y)$: ebenes Vektorfeld
$\vec{r} = \vec{r}(t)$: Ortsvektor des Punktes P = P(t)
$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(t)$: Tangentenvektor zu $\vec{r}$

Ist die Linie geschlossen, so spricht man von einem Ringintegral $\oint$

Vorgehen beim Berechnen

Ein Vektorfeld $\vec{F}$ sowie die Kurve Γ ist gegeben. Gesucht ist der Wert des Linien-integrals.

1. Kurve parametrisieren in der Form $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$
2. Integrationsgrenzen a und b berechnen => Grenzen des Intervalls für t?
3. x(t), y(t), z(t) in die Komponenten von $\vec{F}$ einsetzen => $\vec{F}(t)$
4. Ableitung von $\vec{r}$ nach t berechnen => $\dot{\vec{r}} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t}$
5. Integrand berechnen => Das Skalarprodukt aus $\vec{F}(t)$ und $\dot{\vec{r}}$
6. Das Integral $\int_a^b (\vec{F} \circ \dot{\vec{r}})\,dt$ berechnen

1.8.6 Wegunabhängigkeit eines Linienintegrals, Konservatives Feld, Potentialfeld (MFP 354)

Ein Linienintegral ist genau dann wegunabhängig, wenn es sich in einem Feld mit den folgenden Eigenschafen (Integrabilitätsbedinungen) befindet:

Ebenes Vektorfeld

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Räumliches Vektorfeld

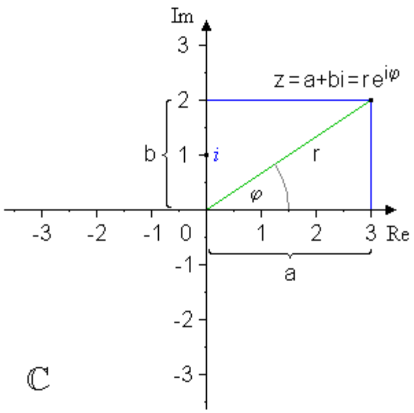
$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Ein Feld mit diesen Eigenschafen wird **konservatives Feld** genannt. Ein konservatives Feld lässt sich auch als Gradientenfeld aus einem Skalarenfeld gewinnen. Das zum konservativen Feld gehörende Skalarenfeld wird **Potentialfeld** genannt.

1.9 Komplexe Zahlen

1.9.1 Darstellung und Umrechnungen

1.9.1.1 Gauss'sche Zahlenebene



Horizontal: Realteil
Vertikal: Imaginärteil

Imaginäre Einheit j

$$j = \sqrt{-1}$$

Betrag

$$|\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$ (vgl. Pythagoras)

=> Hat eine Zahl nur imaginären Anteil so heisst die Zahl 'imaginäre Zahl'

1.9.1.2 Normalform / Kartesische Form

$$\underline{z} = a + b \cdot j$$

1.9.1.3 Polarform

$$\underline{z} = (r\, ;\, \sphericalangle\, \varphi) = r$$

1.9.1.4 Exponentialform / trigon. Form

$$\underline{z} = r \cdot [\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi] = r \cdot e^{j\varphi}$$

Eigenschaften

- Wenn $\varphi \in \mathbb{R}$ dann $\left|e^{j\varphi}\right| = 1$ (d.h. die komplexe Zahl liegt auf dem Einheitskreis)
- Die Potenzgesetze können angewendet werden
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

1.9.1.5 Konjugiert komplexe Zahl

Die konjugiert komplexe Zahl hat den selben Realteil aber den negierten Imaginärteil.
Also: $\underline{z} = a + b\ j$ => wird zu => $\overline{\underline{z}} = a - b\ j$
daraus folgt: $\underline{z} \cdot \overline{\underline{z}} = a^2 + b^2$

1.9.1.6 Umwandlung nach Polarform

$$r = |z| \quad (siehe\ oben)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & falls\ a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + k \cdot \pi & falls\ a < 0 \\ \frac{\pi}{2} & falls\ a = 0\ ,\ b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & falls\ a = 0\ ,\ b < 0 \end{cases}$$

1.9.1.7 Umwandlung nach Normalform

$$\underline{z} = r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot j = r \cdot [\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi] = r \cdot cis\ \varphi$$

1.9.1.8 TI-89 Befehle

Imaginärer Anteil:	imag(z)
Realer Anteil:	real(z)
Umwandlung nach Polarform:	z ►Polar
Umwandlung nach Normalform:	z ►Rect
Winkel bzw. Argument:	angle(z)
Betrag:	abs(z)
Konjugiert komplexe Zahl:	conj(z)

1.9.2 Rechenoperationen

Für die komplexen Zahlen gelten grundsätzlich die üblichen algeb. Umformungsarten.
Beachte: $j \cdot j = -1$ (vgl. oben)

1.9.2.1 Addition & Subtraktion

$$\underline{z_1} + \underline{z_2} = (a_1 + a_2) + (b_a + b_2) \cdot j$$

In der Gauss'schen Zahlenebene können komplexe Zahlen wie Vektoren addiert/subtrahiert werden.

1.9.2.2 Multiplikation

$$\underline{z_1} \cdot \underline{z_2} = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \cdot j$$

In der Gauss'schen Zahlenebene werden komplexe Zahlen multipliziert indem man
- Die Beträge multipliziert
- und die Argumente addiert

1.9.2.3 Division

$$\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot j$$

Hinweis: Komplexe Zahlen können dividiert werden, in dem man den Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitert.

In der Gauss'schen Zahlenebene werden komplexe Zahlen dividiert indem man
- Die Beträge dividiert
- und die Argumente subtrahiert

1.9.2.4 Die reziproke Zahl

$$z = (r ; \sphericalangle \varphi) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r} ; \sphericalangle - \varphi\right)$$

1.9.2.5 Potenzieren

$$z^n = (r \cdot e^{j \varphi})^n = r^n \cdot e^{j n \varphi}$$

1.9.2.6 Radizieren

Die Gleichung $w^n = z$ (die n-te Wurzel aus z) hat genau n verschiedene Lösungen:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot cis\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) \qquad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Für Umformungen kann angewendet werden: $\sqrt{-a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = j \cdot \sqrt{a}$

1.9.2.7 Quadratische Gleichungen

Definition	Ist $x_1 = a + b\,j$ eine komplexe Lösung einer Quad. Gleichung mit reellen Koeffizienten, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl zu x_1 $x_2 = a - b\,j$ eine Lösung.

1.9.2.8 Linearfaktorzerlegung (Fundamentalsatz der Algebra)

Definition:	Jedes Polynom n-ten Grades lässt sich in n Linearfaktoren zerlegen. Es gilt: $P(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$ wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (eventuell komplexe) Nullstellen sind.

1.10 Differentialgleichungen

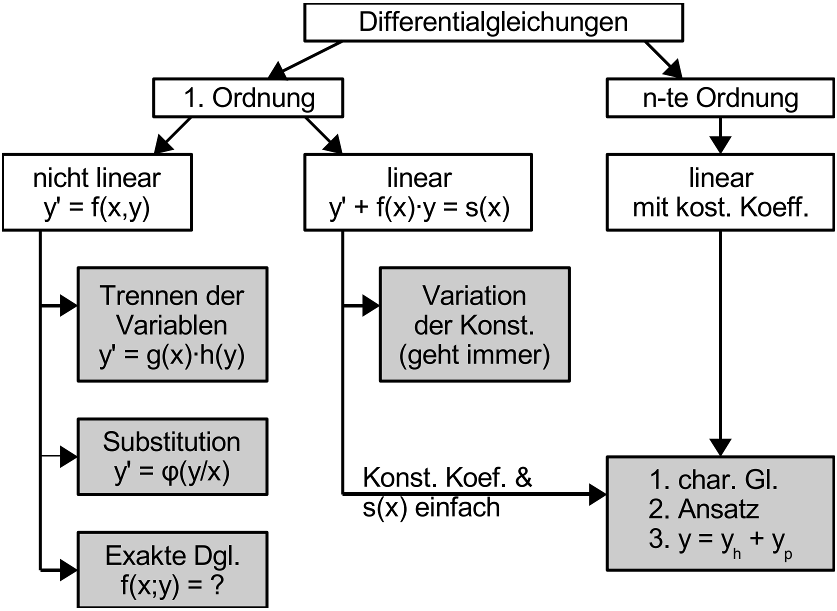
Eine Gleichung zur Bestimmung einer Funktion heisst Differentialgleichung, wenn sie mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion enthält.

1.10.1 Begriffe

Gewöhnliche Differentialgleichungen (engl. ordinary differential equations, ODEs)
Es wird eine Funktion mit einer Variablen y(x) gesucht
Partielle Differentialgleichungen (engl. partial differential equations, PDEs)
Es wird eine Funktion mit mehreren Variablen y(t,u) gesucht

Dgl.-Gleichungssysteme	Wenn mehr als eine Funktion gesucht ist (Analog Gleichungss.)
Allgemeine Lösung	Die allg. Lösung ist eine Funktionenschar. Sie enthält unabhängige Parameter (Integrationskonstanten) => unendlich viele Lösungen, je nach Wahl der Konstanten
Spezielle bzw. partikuläre Lösung	Die Parameter sind mit Zahlen belegt => nur eine Lösung, da die Konstanten definiert sind
Anfangsbedingungen	Alle Bedingungen beziehen sich auf ein festes Argument Bsp: y(**2**) = 5; y'(**2**) = 3; usw.
Randwertbedingungen	Die Bedingungen beziehen sich auf verschiedene Argumente Bsp: y(**2**) = 5; y'(**5**) = 3; usw.
explizite Dgl. / Form	Die Gleichung ist nach der höchsten Ableitung aufgelöst
implizite Dgl. / Form	Die Gleichung ist nicht explizit angegeben

1.10.2 Übersicht der Dgl. und Lösungsmethoden



1.10.3 Dgl. 1. Ordnung (MFP 260ff)

1.10.3.1 Nichtlineare Dgl. 1. Ordnung

Definition

Form (explizit): $y' = \varphi(x, y)$

Lösen mit „Trennen bzw. Separation der Variablen"

Die Funktion $\varphi(x, y)$ lasse sich als Produkt $y' = g(x) \cdot h(y)$ darstellen:

7. Trennen der Variablen $\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = g(x) \cdot h(y) \rightarrow \frac{\mathrm{d}\, y}{h(y)} = g(x)\, \mathrm{d}\, x$
8. Beidseitige Integration $\int \frac{1}{h(y)} \; \mathrm{d}\, y = \int g(x) \; \mathrm{d}\, x$
9. Integrale auflösen (Achtung Integrationskonstante auf einer Seite!)
10. Je nach Anforderung in explizite Form umwandeln

Lösen mit „Substitution"

Wird angewendet wenn „Separation der Variablen" nicht möglich ist. Es wird mit einer Subtitution eine separable Dgl. gesucht die mit „Separation der Variablen" lösbar ist.

b) Dgl. in der Form $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ => unter jedem y ein x und über jedem x ein y

1. Substitution $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ bzw. $u = \frac{y}{x}$
2. y' der Substitution berechnen $y' = u + x \cdot u'$
3. y bzw. y' in die ursprüngliche Dgl. einsetzen: $u + x \cdot u' = \varphi(u)$
4. Dgl. mit „Separation der Variablen“ lösen => u(x)
5. y(x) mit y(x) = x · u(x) lösen

c) Dgl. in der Form $y' = \varphi(ax + by + c)$

1. Substitution $u(x) = ax + b \cdot y(x) + c$ bzw. $u = ax + by + c$
2. y' der Substitution berechnen $y' = \frac{u' - a}{b}$
3. y bzw. y' in die ursprüngliche Dgl. einsetzen: $\frac{u' - a}{b} = \varphi(u)$
4. Dgl. mit „Separation der Variablen“ lösen => u(x)
5. y(x) mit $y(x) = \frac{u(x) - ax - c}{b}$ lösen

d) Dgl. in der Form $y' + g(x) \cdot y = h(x) \cdot y^n$ (Bernoullische Dgl.)
=> MFP 261

__Lösen mit „Exakte (totale) Dgl.“__

Auch „Partielle Differentialgleichung“ (engl. partial differential equation, PDE) genannt
Angewendet wenn eine Funktion mit mehreren Variablen gesucht wird

Liegt eine Dgl. der Form $\frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \mathrm{d}y = 0$ vor, d.h. eine exakte Dgl., so lautet die allg. Lösung $f(x; y) = C$

Lösungsmethode

1. Dgl. in die Form f(x;y) dx + g(x;y) dy = 0 bringen
2. Eine Funktion suchen damit die Bedingung für eine exakte Dgl. erfüllt wird
   Beispiel:

Integration ergibt: $F(x;y) = x^2 + x\,y^2 + h_1(y)$ und $G(x;y) = x\,y^2 + h_2(x)$
mit $h_1(x) = 0$ und $h_2(x) = x^2$ ist die Bedingung erfüllt

3. Die Lösung lautet somit $f(x;y) = C$
   Im Beispiel: $x^2 + x\,y^2 = C$

1.10.3.2 Lineare (homogene/inhomogene) Differentialgleichung (MFP 263)

Definitionen

Form (implizit): $y' + f(x) \cdot y = s(x)$
s(x) wird als Störfunktion/Störglied bezeichnet.
$s(x) \equiv 0$ => homogene lineare Dgl.
$s(x) \neq 0$ => inhomogene lineare Dgl.

Lösen mit „Variation der Konstanten"

Diese Lösungsmethode funktioniert immer!

1. Die homogene Dgl. $y' + f(x) \cdot y = \mathbf{0}$ mit Variablentrennung lösen (siehe Lösungsmethoden unter Kap. 1.10.3.1 Seite 31)
   => ergibt die „homogene" Lösung der Dgl. $y = K \cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$
2. Die Konstante K in der „homogenen" Lösung wird durch eine noch unbekannte Funktion K(x) ersetzt. Das heisst $y = K(x) \cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$ soll eine Lösung der ursprünglichen Dgl. sein.
   I. Ableitung von y bestimmen => y'
   II. y' und y in die ursprüngliche Dgl. einsetzen
   III. Beidseitig integrieren **=> K(x)**
3. K(x) in die „homogene" Lösung einsetzen => **Lösung der Differentialgleichung**

Beispiel (aus MFP 264)

Gegeben: $y' - \frac{y}{x} = x^2$

1. Homogene Dgl. mit „Trennen der Variablen" lösen => y = K · x
2. y = K · x wird zu **y = K(x) · x** => K(x) suchen
   I. Ableitung von y => **y' = K'(x) · x + K(x)**
   II. y und y' einsetzen in gegebene Dgl:

$$K'(x) \cdot x + K(x) - \frac{K(x) \cdot x}{x} = x^2$$

vereinfacht: $K'(x) = x$

III. Durch Integration **K(x) bestimmen**:

$$K(x) = \frac{1}{2} x^2 + C$$

3. Durch einsetzen von K(x) in die Lösung der homogenen Dgl. ergibt sich die Lösung

$$y = \left(\frac{1}{2} x^2 + C \right) \cdot x$$

1.10.4 Lineare Dgl. 2-ter Ordnung mit konst. Koeffizienten (MFP 272)

1.10.4.1 Definition

Unter einer linearen Dgl. 2-ter Ordnung mit konst. Koeffizienten versteht man eine Dgl. in der Form

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = s(x)$$

s(x) wird als Störfunktion/Störglied/Inhomogenität bezeichnet.
$s(x) \equiv 0$ => homogene lineare Dgl.
$s(x) \neq 0$ => inhomogene lineare Dgl.
a_0, a_1, a_2 sind keine Funktion von x d.h. sind konstant

1.10.4.2 Lineare homogene Dgl. mit konst. Koeffizienten lösen

Form: $a y'' + b y' + c y = \mathbf{0}$

Lösungsmethode

1. Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ führt auf die Charakteristische Gleichung
$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$$
2. Char. Gleichung nach λ_1 bzw. λ_2 auflösen und folgende Fälle unterscheiden:

I. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und reell: $y(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$

II. $\lambda_1 = \lambda_2$ und reell: $y(x) = [C_1 \cdot x + C_2] \cdot e^{\lambda x}$

III. $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j \beta$ (d.h. komplex bzw. konjugiert komplex)

$$y(x) = C_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

1.10.4.3 Lineare inhomogene Dgl. mit konst. Koeffizienten lösen

Form: $a y'' + b y' + c y = \boldsymbol{s(x)}$

Lösungsmethode

1. Allgemeine **Lösung der homogenen Dgl.** bestimmen => Siehe 1.10.4.2 => $y_h(x)$
2. Eine **partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl.** bestimmen

I. Ansatz aus der Tablle in MFP 275 suchen

II. Ansatz je nach Bedarf umformen in y, y', y'' und in Dgl. einsetzen und anschliessend auf der linken Seite vereinfachen (d.h. Störfunktion an sich nicht verändern!)

III. Koeffizientenvergleich anstellen um die Parameter des Ansatzes zu definieren

IV. Parameter in Ansatz einsetzen => $y_p(x)$

3. **Allgemeine Lösung der Dgl.** bestimmen => $y(x) = y_h(x)$ **+** $y_p(x)$

1.10.5 Lineare Dgl. n-ter Ordnung mit konst. Koeffizienten (MFP 285)

1.10.5.1 Definition

Unter einer <u>linearen</u> Dgl. n-ter Ordnung <u>mit konst. Koeffizienten</u> versteht man eine Dgl. in der Form

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = s(x)$$

s(x) wird als Störfunktion/Störglied/Inhomogenität bezeichnet.
s(x) ≡ 0 => <u>homogene</u> lineare Dgl.
s(x) ≠ 0 => <u>inhomogene</u> lineare Dgl.
$a_0, a_1, \ldots, a_n$ sind keine Funktion von x d.h. sind konstant

1.10.5.2 Lineare homogene Dgl. mit konst. Koeffizienten lösen

Form: $a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = \mathbf{0}$

<u>Lösungsmethode</u>

1. Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ führt auf die Charakteristische Gleichung

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

2. Char. Gleichung nach λ auflösen (es gibt n Lösungen für λ) und die Basislösungen wie folgt suchen:

I. Eine <u>einfache reelle</u> Lösung führt auf die Basislösung

$$e^{\lambda x}$$

II. Eine <u>k-fache (mehrfache) reelle</u> Lösung führt auf die k Basislösungen

$$e^{\lambda x},\ \boldsymbol{x^1}\, e^{\lambda x},\ \boldsymbol{x^2}\, e^{\lambda x},\ \ldots,\ \boldsymbol{x^k}\, e^{\lambda x}$$

III. Eine <u>einfache komplexe</u> Lösung führt auf die zwei Basislösungen

$e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$ und $e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$

IV. Eine <u>komplexe k-fache (mehrfache)</u> Lösung führt auf 2k Basislösungen

$$e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x),\ \boldsymbol{x^1}\, e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x),\ \ldots,\ \boldsymbol{x^k}\, e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

und

$$e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x), \; \boldsymbol{x}^{\mathbf{1}} e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x), \ldots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$$

3. Die allgemeine Lösung ist die Summe aller 3 unter Punkt 2 aufgeführten Einzelbeträge. Die Einzelbeträge müssen einzeln mit einem C multipliziert werden.

1.10.5.3 Lineare inhomogene Dgl. mit konst. Koeffizienten lösen

Form: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x})$

Lösungsmethode

1. Allgemeine **Lösung der homogenen Dgl.** bestimmen => Siehe 1.10.5.2 => $y_h(x)$
2. Eine **partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl.** bestimmen
   I. Ansatz aus der Tablle in MFP 287 suchen
   II. Ansatz je nach Bedarf umformen in y, y', y'' usw. und in Dgl. einsetzen und anschliessend auf der linken Seite vereinfachen (d.h. Störfunktion an sich nicht verändern!)
   III. Koeffizientenvergleich anstellen um die Parameter des Ansatzes zu definieren
   IV. Parameter in Ansatz einsetzen => $y_p(x)$
3. **Allgemeine Lösung der Dgl.** bestimmen => $y(x) = y_h(x)$ **+** $y_p(x)$

1.10.6 Differentialgleichungssysteme (MFP 288)

Es sind mehrere Dgl. gegeben. Beispiel:

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \end{array} \left| \begin{array}{c} y'_1 = 3 \cdot y_1 + y_2 \\ y'_2 = y_1 - y_2 \end{array} \right|$$

Gesucht sind y_1 und y_2

Lösungsmethode

1. Eine Gleichung nach einer Funktion auflösen (wie bei normalen Gleichungssystemen) => Bsp: (1) $y_2 = y'_1 - 3 \cdot y_1$
2. Obige Funktion in die andere Gleichung einsetzen
3. Erhaltene Dgl. mit nur einer Funktion lösen
4. Für die zweite Funktion die 1. Funktion bei Schritt 1 einsetzen

1.10.7 Orthogonale Trajektorien

Eine Trajektorie ist ein Funktionsgraph, der eine gegebene Kurvenschar isogonal, das heisst immer im gleichen Winkel, schneidet. Beträgt dieser Winkel 90°, so spricht man von einer orthogonalen Trajektorie.

Lösungsmethode

1. Suche eine Dgl. für die gegebene Kurvenschar
   Kurvenschar: y = f(x,c)
   Ableitung: y' = f'(x,c)
   => 2 Gleichungen => c eliminieren => y' = f(x,y)
2. Dgl. der orthogonalen Trajektorien bestimmen
   $$y' = -\frac{1}{f(x,y)}$$
3. Dgl. der orthogonalen Trajektorien lösen.

1.10.8 TI-89 und Maple Befehle

Operation	***TI-89***	***Maple***
Dgl. lösen	deSolve(Dgl,indep,dep) deSolve(y'=2*x*y,x,y)	dsolve(Dgl,y(x)); dsolve(diff(y(x),x)=2*x*y(x),y(x));
Dgl. mit Start-bedingung lö-sen	deSolve(Dgl. **and** Startb.,indep,dep) deSolve(y'=2*x*y **and** y(1)=0.5,x,y)	dsolve(**{**Dgl,Startb.**}**,y(x)); dsolve(**{**diff(y(x),x)=2*x*y(x),y(1)=0.5**}**,y(x));
lineare Dgl. lö-sen	---	with(DETools); linearsol(Dgl,y(x));

1.11 Kombinatorik (MFP 363ff)

1.11.1 Permutationen P

Vorstellung: Auf wie viele Arten können n Elemente verschieden angeordnet werden?

Die Elemente sind unterschiedlich

$$P(n) = n!$$

Es gibt gleiche Elemente

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

wobei $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n \quad und \quad k \leq n$

n: Anzahl Elemente insgesamt
n_1, n_2, ... : Anzahl Elemente die gleich sind (z.B. 2 rote, 3 grüne)

1.11.2 Kombinationen C

Vorstellung: Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden nacheinander k Kugeln gezogen und in beliebiger Reihenfolge angeordnet. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

*Anzahl Kombinationen ohne Zurücklegen der gezogenen Kugeln (**ohne Wiederholung**)*

$$C\,(n\,;\,k)=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\,!}=\frac{n\,!}{k\,!\cdot(n-k)\,!}=\binom{n}{k}\quad;\quad k\leq n$$

TI-89:ncr(n,k)

=> Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ wird als Binomialkoeffizient bezeichnet.

*Anzahl Kombinationen mit Zurücklegen der gezogenen Kugeln (**mit Wiederholung**)*

$$C_w\,(n\,;\,k)=\bar{C}\,(n\,;\,k)=C\,(n+k-1\,;\,k)=\binom{n+k-1}{k}$$

1.11.3 Variationen V

Vorstellung: Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden nacheinander k Kugeln gezogen und in der Reihenfolge der Ziehung angeordnet. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

*Anzahl Variationen ohne Zurücklegen der gezogenen Kugeln (**ohne Wiederholung**)*

$$V\,(n\,;\,k)=\frac{n\,!}{(n-k)\,!}\quad;\quad k\leq n$$

*Anzahl Variationen mit Zurücklegen der gezogenen Kugeln (**mit Wiederholung**)*

$$V_w\,(n\,;\,k)=n^k\quad;\quad k=1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots$$

1.12 Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.12.1 Begriffe

1.12.1.1 Unterscheidung der Ereignisse

Sicheres Ereignis	Ereignis trifft sicher ein
Zufälliges Ereignis	Ereignis kann eintreffen
Unmögliches Ereignis	Ereignis trifft sicher nicht ein

1.12.1.2 Relative Häufigkeit eines Ereignisses

$$P(E)=\frac{r}{n}=\frac{Anz.\ eingetretene\ Ereignisse}{Anz.\ Versuche}$$

sicheres Ereignis: $P(S)=\frac{n}{n}=1$ unmögliches Ereignis: $P(\phi)=\frac{0}{n}=0$

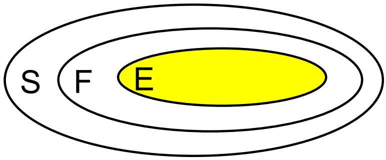
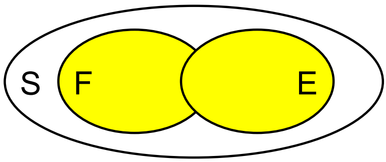
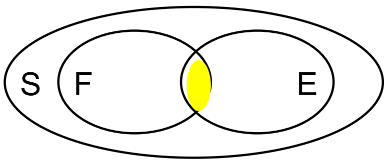
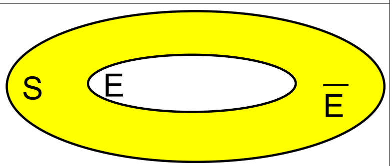
1.12.2 Stichprobenraum / Ergebnismenge S

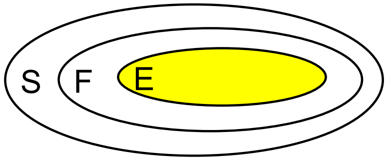
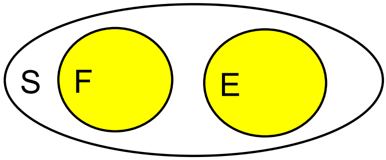
Strichprobenraum (oder Ergebnismenge) ist Menge S (oder Ω), für die gilt:
1. Jedem Ereignis E entspricht genau ein Element von S
2. Jedem Element von S entspricht mindestens ein Ereignis E

1.12.3 Ereignisse als Teilmengen von S

Jede Teilmenge E des Stichprobenraumes S heisst Ereignis. Das Ereignis E tritt ein, wenn das Ergebnis des Experiments ein Element von E ist.
E = S => sicheres Ereignis
E = Φ => unmögliches Ereignis

1.12.4 Verknüpfung von Ereignissen

<table>
<tr><td>Wenn E eintritt, tritt auch F ein:</td><td>$E \subset F$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>E oder F tritt ein:</td><td>$E \cup F$
(vereinigt)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>E und F treten ein:</td><td>$E \cap F$
(geschnitten)</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\bar{E}$ wenn E nicht eintritt:</td><td>$\bar{E}=S \setminus E$</td><td>
</td></tr>
</table>

Wenn E eintritt, tritt auch F ein: $E \subset F$	
E und F schliessen sich aus: $E \cap F = \phi$	

1.12.5 Axiome von Kolmogorow

1. Die Ereignisse bilden eine Ereignisalgebra.
2. Jedem Ereignis $E \in \varepsilon$ wird eine reelle Zahl P(E) zugeordnet $\varepsilon \xrightarrow{P} \mathbb{R}$.

   Es gilt:

   $P(E) \geqslant 0$, für alle $E \in \varepsilon$

   $P(S) = 1$, für das sichere Ereignis S

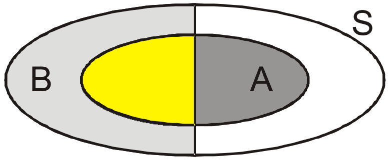
   $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$, wenn $E \cap F = \phi$ (dürfen nicht zusammen auftreten)

1.12.6 Folgerungen aus den Axiomen

Aus den Axiomen kann bewiesen werden:

Die Wahrscheinlichkeit des entgegengesetzten Ereignisses	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Die Wahrscheinlichkeit des unmöglichen Ereignisses	$P(\phi) = 0$
Die Wahrscheinlichkeit mehrerer unvereinbarer (nicht miteinander eintreffender) Ereignisse	$P(A \cup B \cup C \cup D) =$ $P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$
Die Wahrscheinlichkeit von A, wenn Ereignis A das Ereignis B nach sich zieht ($A \subset B$)	$A \subset B \rightarrow P(A) \leq P(B)$
Grenzen der Wahrscheinlichkeit	$0 \leq P(A) \leq 1$
Additionssatz für zwei beliebige Ereignisse	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Gleich wahrscheinliche, unvereinbare Ereignisse (Laplace-Experiment)	$P(E) = \frac{g}{n} = \frac{Anz.\ günstige\ Fälle}{Anz.\ mögliche\ Fälle}$

1.12.7 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B: $P(A\|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$	

1.12.8 Multiplikationssatz

$$\begin{aligned} &P(A\cap B)\\ &\quad =P(B)\cdot P(A|B) \quad \text{wenn} \quad P(B)\neq 0\\ &\quad =P(A)\cdot P(B|A) \quad \text{wenn} \quad P(A)\neq 0 \end{aligned}$$

bzw. wenn P(A) = 0 oder P(B) = 0: $P(A\cap B)=0$

1.12.9 Unabhängigkeit der Ereignisse

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

1.12.10 Formel von Sylvester

für drei Ereignisse gilt:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)$$
$$-P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)$$

Diese Formel kann für beliebig viele Ereignisse erweitert werden.

1.13 Statistik

1.14 Reelle Matrizen (MFP 191ff)

1.14.1 Definition der m · n Matrix

Ist ein rechteckiges Schema von m · n Elementen (m Zeilen, n Spalten):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ik}: Element in der i-ten Zeile / k-ten Spalte

1.14.2 Spezielle Matrizen

1.14.2.1 Zeilen- und Spaltenmatrix

Zeilenmatrix (Zeilenvektor)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Spaltenmatrix (Spaltenvektor)

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

1.14.2.2 Nullmatrix

Alle Elemente sind 0

1.14.2.3 Transponierte Matrix A^T

<u>Spalten und Zeilen</u> sind miteinander <u>vertauscht</u> (gestürzt). Falls A quadratisch ist, kann auch an der Hauptdiagonalen gespiegelt werden.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

Es gilt immer: $(A^T)^T = A$

<u>Rechengesetze</u>

$$(A+B)^T = A^T + B^T \quad ; \quad (A-B)^T = A^T - B^T$$

$$(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

1.14.2.4 Quadratische Matrix n-ter Ordnung

Hat die selbe Anzahl Spalten und Zeilen (m=n): $Q=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{\mathbf{nn}} \end{pmatrix}$

__Haupt- und Nebendiagonale__

$$\begin{pmatrix} O & O & O \\ O & O & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

Nebendiagonale

Hauptdiagonale

__Spur__

Ist die Summe aller Hauptdiagonalelemente

1.14.2.5 Spezielle quadratische Matrizen

__Diagonalmatrix__

Alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonalen sind 0 und mindestens ein Element der Hauptdiagonalen ist verschieden von 0.

$$D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

__Einheitsmatrix__

Die Elemente auf der Hauptdiagonalen sind 1 die restlichen 0.

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

__Symetrische Matrix__

Ist bezüglich der Hauptdiagonalen gespiegelt.

__Dreiecksmatrix__

Alle Elemente ober- oder unterhalb der Hauptdiagonalen sind 0.

$$D=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 9 & 4 \\ 0 & 8 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Reguläre und Singuläre Matrix (MFP 196)

Reguläre: det A ≠ 0
Singuläre: det A ≠ 0

Inverse Matrix (MFP 196)

A sei eine reguläre Matrix, dann ist

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$$

Berechnung für eine 2 · 2 Matrix

$$A^{-1}=\frac{1}{det\ A}\cdot\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Berechnung für eine n · n Matrix

$$A^{-1}=\frac{1}{det\ A}\cdot\left(e_{ik}=\frac{(-1)^{i+k}\cdot A_{ki}}{D}\right)\quad \begin{matrix} 1\le i\le n \\ 1\le k\le n \end{matrix}$$

1.14.3 Determinante

1.14.3.1 Einer 2 · 2 Matrix

$$det\ A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-}_{+}=a_{11}\cdot a_{12}-a_{21}\cdot a_{12}$$

1.14.3.2 Einer 3 · 3 Matrix

$$det\ A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33}+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}+a_{13}\,a_{21}\,a_{32}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

1.14.3.3 Einer n · n Matrix

tbd

1.14.3.4 Rechengesetze

$$det\ (A^{-1}) = (det\ A)^{-1} = \frac{1}{det\ A}$$
$$det\ (A \cdot B) = det\ A \cdot det\ B$$
$$det\ (A \cdot B) = det\ (B \cdot A)$$

1.14.4 Rechenoperationen

1.14.4.1 Gleichheit

Zwei (m · n) Matrizen heissen gleich, wenn sie in allen entsprechenden Elementen übereinstimmen

1.14.4.2 Addition und Subtraktion

Zwei (m · n) Matrizen werden addiert / subtrahiert, indem die einander entsprechenden Elemente addiert / subtrahiert werden.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Addition und Subtraktion von Matrizen ist kommutativ und assoziativ
Kommutativgesetz: A + B = B + A
Assoziativgesetz: A + (B + C) = (A + B) + C

=> Es gelten die selben Gesetze wie mit Vektoren

Neutrales Element der Addition und Subtraktion ist die Nullmatrix.

1.14.4.3 Multiplikation mit einem Skalar

Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert indem jedes Element mit dem Skalar multipliziert wird.

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k \cdot a_{m1} & \cdots & k \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Gesetze

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$$
$$(k + m) \cdot A = k \cdot A + m \cdot A$$

$$(k \cdot m) \cdot A = k \cdot (m \cdot A)$$
$$1 \cdot A = A$$

=> Es gelten die selben Gesetze wie mit Vektoren

Spezielles für die Berechnung der Determinanten:

$$k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

1.14.4.4 Multiplikation zweier Matrizen

A = (a_{ik}) vom Typ (m,n) multipliziert mit B = (b_{ik}) vom Typ (n,p) ergibt die Matrix C = A · B = (c_{ik}) vom Typ (m,p). c_{ik} ist dabei das Skalarprodukt aus dem i-ten Zeilenvektro von A und dem k-ten Spaltenvektor von B.

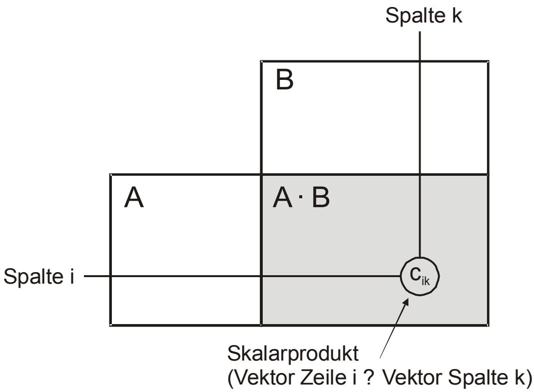
=> Die Multiplikation zweier Matrizen ist nicht kommutativ $A \cdot B \neq B \cdot A$

Bedingungen

Spaltenanzahl von A = Zeilenanzahl von B
ODER
Zeilenanzahl von A = Spaltenanzahl von B

$$A \cdot B = C$$
$$(m \cdot \boldsymbol{n}) \cdot (\boldsymbol{n} \cdot p) = (m \cdot p)$$

Falk-Schema



1.14.4.5 Multiplikation mit einer Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot D=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\downarrow & \downarrow & \downarrow\end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{11}\cdot \boldsymbol{d_1} & a_{12}\cdot \boldsymbol{d_2} & a_{13}\cdot \boldsymbol{d_3}\\ a_{21}\cdot \boldsymbol{d_1} & a_{22}\cdot \boldsymbol{d_2} & a_{23}\cdot \boldsymbol{d_3}\\ a_{31}\cdot \boldsymbol{d_1} & a_{32}\cdot \boldsymbol{d_2} & a_{33}\cdot \boldsymbol{d_3}\end{pmatrix}\end{array} \quad ; \quad D\cdot A=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} a_{11}\cdot \boldsymbol{d_1} & a_{12}\cdot \boldsymbol{d_1} & a_{13}\cdot \boldsymbol{d_1}\\ a_{21}\cdot \boldsymbol{d_2} & a_{22}\cdot \boldsymbol{d_2} & a_{23}\cdot \boldsymbol{d_2}\\ a_{31}\cdot \boldsymbol{d_3} & a_{32}\cdot \boldsymbol{d_3} & a_{33}\cdot \boldsymbol{d_3}\end{pmatrix} & \begin{array}{c}\leftarrow\\ \leftarrow\\ \leftarrow\end{array}\end{array}$$

1.14.4.6 Multiplikation mit Einheits- und Nullmatrix

$$A\cdot E=E\cdot A=A$$
$$A\cdot 0=0\cdot A=0$$

=> Analog wie 0 und 1 bei der Multiplikation von Skalaren

1.14.4.7 Multiplikation von mehreren Matrizen

Es gilt das Assoziativgesetz

$$A\cdot B\cdot C=(A\cdot B)\cdot C$$

Es gilt das Distributivgesetz:

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$
$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$$

1.14.4.8 Matrizengleichungen

Typ 1

$$A\cdot X=B \quad\rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot B$$
$$X\cdot A=B \quad\rightarrow\quad X=B\cdot A^{-1}$$

Typ 2

$$A\cdot B+k\cdot X=C-l\cdot X \qquad (k\,,\,l\in\mathbb{R})$$
$$X=\frac{1}{k+l}\cdot(C-A\cdot B)$$

Typ 3

$$X\cdot A\cdot B-A-X\cdot C=D$$
$$X=(D+A)\cdot(A\cdot B-C)^{-1}$$

Typ 4

$$C+A\cdot X=B\cdot X$$
$$X=(B-A)^{-1}\cdot C$$

Typ 5

$$A\cdot X\cdot B=C$$
$$X=A^{-1}\cdot C\cdot B^{-1}$$

$$\boxed{A=k\cdot B \quad\rightarrow\quad A^{-1}=\frac{1}{k}\cdot B^{-1}}$$

1.14.4.9 Lineare Gleichungssysteme mit Determinanten

Gesucht ist die Lösung des Gleichungssystems mit zwei Unbekannten x_1 und x_2

$$\left| \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) \cdot x_1 = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12} \\ (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) \cdot x_2 = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1 \end{array} \right|$$

mit der Determinante $\boxed{D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}$ und den Determinanten

$\boxed{D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 \cdot a_{22} - b_2 \cdot a_{12}}$ und $\boxed{D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1}$

ergibt sich: $\left| \begin{array}{l} D \cdot x_1 = D_1 \\ D \cdot x_2 = D_2 \end{array} \right|$

Fallunterscheidung

$D \neq 0$ D_1, D_2 beliebig	Cramersche Regel: Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung: $x_1 = \frac{D_1}{D} \quad ; \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$
$D = 0$	a) $D_1 \neq 0$ und $D_2 \neq 0$: Leere Menge b) $D_1 = 0$ und $D_2 = 0$: Unendliche Lösungsmenge

=> Ist das Gleichungssystem homogen ($b_1 = 0$, $b_2 = 0$) dann hat das Gleichungssystem mindestens eine Lösung (die triviale).

1.14.5 Eigenwerte / Eigenvektoren

tbd