

## FINITE ELEMENT METHODE - ZUSAMMENFASSUNG

### MOTIVATION/GRUNDGEDANKE:

Mathematisch: Ein numerisches Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen, welche in ein algebraisches Gleichungssystem überführt werden.

Der Grundgedanke besteht darin, das Werkstück in viele endliche (finite) Elemente aufzuteilen, die an den Elementrändern verknüpft sind. Für die gesuchten Funktionen (Verschiebungen, Stress), werden Ansätze gewählt, die nur in den einzelnen Elementen definiert sind und der unbekannte Faktor die Verschiebung ist. FEM wird meist in der Vorentwicklung (Konzeptphase) eingesetzt um den Prototypen so gut als möglich zu generieren. Weiter können so Versuche vor der Prototypenherstellung bereits vollzogen werden und somit die Bauteile Belastungsgerecht ausgelegt werden.

### ALLGEMEINES ZU FEM:

- Ist eine Näherungslösung ( numerisch)
- Entscheidend sind die Verschiebung der einzelnen Knoten
- Verschiebung (DOF = Freiheitsgrad einschränken = Die Unbekannten)
- **Algebraische Grundgleichung  $[K] \cdot \{u\} = [F]$**
- **K = Steifigkeitsmatrix; u = Verschiebungsfaktor, F = Kraftfaktor**
- Gesetze, die bei jedem Körper gelten:      - Kräftegleichgewicht, Werkstoffgesetz, Kinematische Beziehung
- Diskontinuität = Material, Geometrie, Belastung ändert sich
- Alles zwischen den Knoten verhält sich linear
- Linear = Linie mit 2 Knoten → + wenig Gleichungen    - geringere Genauigkeit
- Quadratisch = Linie mit Mittelknoten → + Höhere Genauigkeit      - mehr Gleichungen
- **Dreiecke und Tetraeder ohne Mittelknoten sind nicht brauchbar**
- Verschiebung eines Knoten um den Wert x erzeugt in diesem Punkt eine Reaktionskraft
- Erdanziehung (Eigengewicht) = immer  $9.81\text{m/s}^2$  (egal welche Einheiten verwendet werden)
- Gewichtskraft immer in der Gegenrichtung eingeben (Pfeil zeigt die Reaktionskraft)
- Statisch bestimmtes Kraftwerk kann sich immer ausdehnen ohne, dass Kräfte entstehen
- Superposition = Überlagerung der Belastungsfälle
- Immer ein Remasking vornehmen, Belastung kann noch ansteigen
- Singuläre Stelle = Numerischer Fehler → weitere Untersuchung nötig
- Konvergenzkriterium = Angabe von Bedingungen unter denen eine Reihe einen Grenzwert besitzt. (Mathe. Definition)
- Querkräfte: 2, 8
- Biegemoment: 6, 12

### AUFBAU EINER FEM-STRUKTUR

*Welche physikalischen Effekte müssen vom Original berücksichtigt werden? (Idealisierung)*

- Lasten (Kräfte, Momente, Strukturlasten, Verformung)
- Versagensarten (Knicken, Beulen, Gewaltbruch)
- Einfluss der Zeit (Stöße, Kriechen)
- Nichtlinearität (Geometrisch, materiell, Randbedingungen)
- Umweltbedingungen (Temperatur, Korrosion, Strahlung)
- Systemgrenze (Symmetrie)

*Wie kann die idealisierte Physik mit der FE-Methode beschrieben werden? (Modellbildung)*

- Analysetyp (linear, nichtlinear, gekoppelt)
- Elementauswahl (Elementklassen, Elementtypen, Elementgrösse, Netzgenerierung)
- Modellierung der Struktur (direkt, indirekt, Vereinfachungen)
- Diskontinuität (Material, Geometrie, Randbedingungen, Belastung)
- Randbedingungen (Lasteinleitung, Lagerung)
- Werkstoffverhalten (Linear elastisch, nichtlinear)

**ELEMENTE:***Stab-Element:*

- Link1
- 2 Freiheitsgrade am Knoten: Verschiebung  $u_x$ ,  $u_y$
- Geometrie: 2-Dimensional, geeignet für schlanke, langgestreckte Bauteile
- Mindesteingabe: Elastizitätsmodul, Querschnittsfläche
- Typische Anwendung: Stabtragwerk mit vorherrschender Normalkraft. Elemente können nur in Stabrichtung belastet werden (Pendelstütze)
- Fachwerk 3-D: Link8 (3 Freiheitsgrade)

*Balken-Element:*

- Beam3
- 3 Freiheitsgrade am Knoten: 2 Verschiebungen ( $u_x$ ,  $u_y$ ), 1 Rotation (ROTz)
- Geometrie: 2-Dimensional, geeignet für schlanke, langgestreckte Bauteile
- Beanspruchung: Längs- bzw. Normalspannungen, Schubspannungen, Biegespannung
- Mindesteingabe: Elastizitätsmodul, Querschnittsfläche, Trägheitsmoment, Höhe
- Typische Anwendung: Stabtragwerk mit Biegespannungen. Elemente können längs und quer belastet werden.
- Balkenelement im Raum: Beam4 (3 Verschiebungen, 3 Rotationen)

*Scheiben-Element:*

- PLANE42
- 2 Freiheitsgrade am Knoten: 2 Verschiebungen ( $u_x, u_y$ )
- Geometrie: 2-Dimensional, geeignet für Bauteile, deren Form und Belastung nicht von z-Richtung abhängig ist
- Beanspruchung: Normal- und Schubspannungen in der xy-Ebene (keine Spannung in z-Richtung, Dehnungen in x, y, z)
- Mindesteingabe: Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, Dicke
- Typische Anwendungen: Dünne Flächentragwerke, belastet nur in der Ebene

*Ebener Verformungszustand (EVZ) [plain strain]*

3-D Problem wird zum 2-D Problem, da über die ganze Struktur der gleiche Spannungszustand herrscht.

- PLANE42

*Rotationssymmetrisches-Element:*

- PLANE42
- 2 Freiheitsgrade am Knoten: 2 Verschiebungen ( $u_x, u_y$ )
- Geometrie: 2-Dimensional, geeignet für Bauteile, deren Form und Belastung nicht von der Umfangsposition (Winkel) um die Rotationsachse abhängt (Querschnitte und lasten an jedem Querschnitt gleich)
- Beanspruchung: Normal- und Schubspannungen in der xy-Ebene und Normalspannungen in Umfangsrichtung, Dehnungen in der xy-Ebene und in z-Richtung)
- Mindesteingabe: Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl
- Typische Anwendungen: Gerades Rohr unter Innendruck. Wellen unter Fliehkraftbeanspruchung. Modelliert werden muss nur die rechte Hälfte einer Schnittebene xy durch die Rotationsachse y

### Schalen-Element

- SHELL63
  - 6 Freiheitsgrade am Knoten. 3 Verschiebungen ( $u_x, u_y, u_z$ ), 3 Rotationen (ROT<sub>x</sub>, ROT<sub>y</sub>, ROT<sub>z</sub>)
  - Geometrie: 3-Dimensional, geeignet für flächige Bauteile (Veränderliche Dicke möglich)
  - Beanspruchung: Membran-, Biege- und Schubspannung im Element (linearer Verlauf zwischen Ober- und Unterseite)
  - Mindesteingabe: Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, Dicke
  - Typische Anwendung: Ebene Flächentragwerke wo Biege- und Normalspannungen auftreten.
- Belastung kann quer und parallel zur Fläche aufgenommen werden.
- **Achtung:** *Wo treten die Spannungen auf? Unter- oder Oberseite*

### Platten-Element

- SHELL63
- 3 Freiheitsgrade am Knoten. 1 Verschiebungen ( $u_z$ ), 2 Rotationen (ROT<sub>x</sub>, ROT<sub>y</sub>)
- Geometrie: 3-Dimensional, geeignet für flächige Bauteile
- Beanspruchung: Biegespannungen im Element (linearer Verlauf zwischen Ober- und Unterseite)
- Mindesteingabe: Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, Dicke
- Typische Anwendung: Ebene Flächentragwerk mit vorherrschender Biegebeanspruchung. Belastung darf nur senkrecht zur Fläche sein.

### Volumen-Element

- SOLID45
- 3 Freiheitsgrade am Knoten: 3 Verschiebungen ( $u, v, w$ )
- Geometrie: 3-Dimensional, geeignet für allgemeine, voluminöse Bauteile
- Beanspruchung: Normal- und Schubspannungen in alle 3 Raumrichtungen, Dehnungen ebenso
- Mindesteingabe: Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl
- Typische Anwendungen: Bauteile mit vergleichsweise grossen Abmessungen in allen 3 Richtungen

### STRESS (SPANNUNGSARTEN):

First prinzipal stress = Hauptspannung

Von Mises stress = Wichtige Vergleichsspannung / gilt gut für alle metallischen Werkstoffe / Basierend auf der Gestaltänderungshypothese / für duktile Spannungen

### DARSTELLEN VON SPANNUNGEN:

- Aus der Verschiebung wird die Dehnung berechnet
- Bei Spannungsberechnung zwischen den Elementen wird mittels Interpolation erzeugt → Gefährlich
- Wenn das Ausschalten der Interpolation zu mehreren Farbänderungen zwischen den Elementen führt → Netz verfeinern
- Ausschalten der Interpolation: GP\_Element table\_Stress SX\_Plot Results\_Element table

### SCHNITTSTELLEN:

- Native Schnittstelle : Systemgebunden z.B. Parasolid
- Normierte Schnittstelle : IGES, STEP, DXF, FS

### FEHLERARTEN:

- Numerischer Fehler
- Diskretisierungsfehler (Gravierend; kann nicht durch feineres Netz behoben werden)
- Gesamtfehler

**ELEMENTQUALITÄTEN:**

- Verzerrungsprüfung (Diagonalverhältnis)
- Seitenverhältnisprüfung (Seitenverhältnis)
- Spitzenwinkeligkeitsprüfung (Winkelrektion  $\alpha > 10^\circ$ )
- Überkrümmungsprüfung (Winkelrektion  $\alpha_{\text{grenz}} = 45^\circ$ )

**BERECHNUNGSGENAUIGKEIT:**

- Ansatzfunktion höherer Ordnung
- Elementform möglichst regelmässig
- Elementgrösse der Belastung entsprechend
- Je mehr Knoten, desto genauer
- Je feiner das Netz desto genauer
- Idealisierung der Realität entsprechend
- Numerischer Fehler, Diskretisierungsfehler
- Kompetenz des Anwenders

**2D-IDEALISIERUNGSANSÄTZE:**

- ESZ Ebener Spannungszustand → keine Spannungen in z-Richtung, jedoch Verformung in z-Richtung möglich
- EVZ Ebener Verformungszustand → keine Dehnungen in z-Richtung, jedoch Spannungen in z-Richtung möglich

**KONVERGENZANALYSE:**

Verfeinern des Netzes, bis die Spannungen nicht mehr ansteigen (Endwert erreichen).

**VERGLEICHSSPANNUNGEN:**

- 1., 2. Hauptspannungen (werden bei nicht duktilen Werkstoffen als Vergleichsspannungen herangezogen)
- von Mises-Spannung (wird bei duktilen Werkstoffen als Vergleichsspannung verwendet)

Vergleichsspannung = Resultierende Spannung aus den 6 Spannungskomponenten um eine der Realität entsprechende Spannung darzustellen.

**CAD-IMPORT**

- Geometrie für die Berechnung idealerweise im CAD-System aufbereiten
- Wenn möglich direkte (prt.), native Formate verwenden
- Bei direkt importierten Modellen kann in der Regel auf die Parameter zurückgegriffen werden
- Importierte Modelle über neutrale Formate müssen häufig nachbearbeitet werden
- Toleranzen beachten; Geometriekontrolle (mm oder m)

**Verfahren:**

Direkte (Sparse, Frontal)

+ Genauigkeit

+ Schnell für kleine Gleichungssysteme

- Hoher Speicherbedarf für grosse Gleichungssysteme
- Geschwindigkeit bei grossen Modellen

*Iterative (CG, JCG, PCG)*

- + Speicherbedarf bei grossen Modellen
- + Plattenplatz bei grossen Modellen
- Startlösung notwendig
- Konvergenzkriterium

---

**VORGEHEN BEI DER VALIDIERUNG [AUSWERTUNG]**

- Numerisches Verfahren → keine Exakte Wissenschaft
- Plausibilitätskontrolle (Gleichgewichtskräfte → Lagerreaktionen, Verformung)
- Beträchtliche Spannungskomponenten an theoretisch Spannungsfreien Oberflächen?
- Auffällige Unstetigkeiten der Spannungen an den benachbarten Elementen
- Überprüfen der Berechnungen mit Überschlagsberechnung
- Vergleichsrechnung mit anderen FE-Programmen
- Konvergenzanalyse → mit einem anderen Modell berechnen
- Berechnung mit unterschiedlichen Lasten
- Vergleiche mit praktischen Messungen